

# **INHOMOGÉN ANYAGÚ SZERKEZETI ELEM SZILÁRDSÁGTANI ÉS DINAMIKAI VIZSGÁLATA**

*(OTKA T049115, Zárójelentés)*

**Dr. Ecsedi István**

**Miskolc, 2009.**

# TARTALOMJEGYZÉK

<b>1. Kitűzött és megoldott feladatok</b>	<b>1</b>
<b>2. Személyi feltételek</b>	<b>3</b>
<b>3. Kutatási tevékenység rövid leírása</b>	<b>4</b>
3.1. Húzott-nyomott és hajlított-nyírt rudak feladatai . . . . .	4
3.2. Izotróp, inhomogén rúd hajlítása . . . . .	12
3.3. Kétrétegű, rugalmas anyagú, részlegesen kapcsolt rudak . . . . .	12
3.4. Piezoelektromos réteggel erősített egyenes középvonalú rudak . . . . .	15
3.5. Állandó görbületű kompozit rudak, valamint egy és többrétegű piezoelektromos rudak hajlítása . . . . .	17
3.6. Inhomogén keresztmetszetű rudak csavarása . . . . .	21
3.7. Állandósult vezetési problémák inhomogén, anizotrop testekben . . . . .	21
<b>Hivatkozások</b>	<b>22</b>

# 1. A KUTATÁS SORÁN KITÚZÓTT ÉS MEGOLDOTT FONTOSABB FELADATOK

A kutatómunka tárgyát az inhomogén anyagú szerkezeti elemek mechanikai tulajdonságainak vizsgálata képezi. Az elméleti rugalmasságtan, a szilárdságtan és a numerikus mechanika módszereinek kombinálásával több speciális geometriájú, döntően rúd alakú inhomogén szerkezeti elem mechanikai viselkedésének és mechanikai jellemzőinek a meghatározásával foglalkozik az OTKA T049115 számú kutatás. A vizsgált rúd alakú szerkezeti elemek inhomogenitása elsősorban a keresztmetszet síkjában jelentkezik. Így például egyenes tengelyű rudak esetében, feltéve, hogy az axiális irány a  $z$  tengellyel esik egybe, az anyagjellemzők ( $E$  rugalmassági modulus,  $G$  csúsztató rugalmassági modulus,  $\rho$  sűrűség) csak a keresztmetszeti  $x$ ,  $y$  koordinátának függvényei. Az inhomogenitásnak ezt a típusát keresztmetszeti inhomogenitásnak hívjuk. E típusba tartozó rudakkal kapcsolatban még használatos elnevezés a  $z$ -homogén rúd, amely kiemeli, hogy az „anyagállandók” függetlenek az axiális koordinátától.

Az állandó görbületű, keresztmetszeti inhomogenitással rendelkező rudak esetében használatos elnevezés a  $\varphi$ -homogén görbe rúd, ez esetben az anyagjellemzők a keresztmetszeti  $r$  radiális és keresztmetszeti  $z$  szélességi koordináta függvényei, a  $\varphi$  polárszögtől függetlenek [2]. Itt  $r, \varphi, z$  egy alkalmasan megválasztott  $Or\varphi z$  polárkoordináta-rendszerre vonatkozik, ahol a  $z = 0$  sík a rúd szimmetriasíkja és  $O$  a görberúd középvonalának görbületi középpontja.

Megjegyzendő, hogy a keresztmetszeti inhomogenitással rendelkező rudakra e kutatómunkában elért eredmények egyaránt vonatkoznak folytonos (funkcionálisan gradiens anyagú) és nem folytonos (kompozit, rétegzett, szálerősített, stb.) keresztmetszeti inhomogenitású rudakra.

A részlegesen kapcsolt, kétrétegű egyenes tengelyű kompozit rudak statikai és dinamikai feladatainak megfogalmazása és megoldása analitikus úton és végeselem-módszerrel szintén kiemelt részét képezte az OTKA kutatásnak. A rúd legalább egy szimmetria síkkal rendelkezik és szimmetria síkjában terhelt. A rúd keresztmetszet  $A = A_1 \cup A_2$ ,  $A_i$  ( $i = 1, 2$ ) résztartományát  $E_i$  ( $i = 1, 2$ ) rugalmassági modulusú, izotrop, homogén, rugalmas anyag tölti ki. Az  $A_1$  és  $A_2$  tartományok közös határgörbéjét  $\partial A_{12}$  jelöli. Az  $A_i$  ( $i = 1, 2$ ) keresztmetszetű  $B_i$  ( $i = 1, 2$ ) rúdkomponensek közös határa pedig a  $\partial B_{12} = \partial A_{12} \times (O, L)$  hengerfelület, ahol  $L$  a rúd hossza. Feltevés szerint  $B_1$  és  $B_2$  között normál irányban a kapcsolat tökéletes, szakadás csak az axiális irányú elmozdulásokban lehetséges a  $\partial B_{12}$  közös határfelületen történő áthaladáskor. Több tanulmány és előadás, amely az OTKA támogatásával készült, foglalkozott az ilyen felépítésű rétegzett rudak mechanikai jellemzőinek a meghatározásaival, mint például, lehajlások és feszültségek, valamint szabad rezgések saját-körfrekvenciáinak a számítása, mind analitikus (egzakt) és mind végeselemes számítások irányában történtek kutatások.

Egy és többrétegű téglalap keresztmetszetű szimmetria síkjában hajlított és radiális irányban polarizált állandó görbületű piezoelektromos rudak statikai feladatának megoldására, egy – a mechanikai feszültség és villamos eltolás vektorra épített –, analitikus megoldást

dolgozott ki a kutatócsoport. Továbbá a vizsgálatok tárgyát képezte még egy rugalmas anyagú „külső” és „belső” határoló hengerfelületéhez piezoelektromos aktuátorokkal erősített, állandó görbületű rúd hajlítási feladatának vizsgálata. Az aktuátor elemek vastagsági mérete lényegesen kisebb, mint a téglalap keresztmetszetű rugalmas rúd vastagsági mérete.

Kiemelten foglalkozott a kutatócsoport egyenes középvonalú piezoelektromos aktuátorokat és szenzorokat tartalmazó hajlított és nyírt rudak analízisével. Több optimalizációs feladat megfogalmazása és megoldása – elsősorban statikai kerületérték feladatokkal kapcsolatban – került részletes kidolgozásra.

Keresztmetszeti inhomogenitással rendelkező csavart prizmatikus rudak elméletében, amelyek gyakran előforduló szerkezeti komponensek, több eredményt ért el a kutatócsoport. Alsó és felső korlátokat bizonyított az úgynevezett effektív nyírási modulusra, egy közelítő módszert dolgozott ki a hengeresen anizotrop rudak csavarási feladatának a megoldására. Néhány homogén anyagú rúdra vonatkozó csavarási feladat megoldásának az ismeretében, több funkcionálisan gradiens anyagú rúd csavarási feladatának az egzakt megoldását is levette a kutatócsoport.

Még említésre méltó eredmények születtek a  $\varphi$ -homogén, nem teljes tórusz alakú testek hővezetésével kapcsolatban, továbbá Rayleigh (1876) és Duffing (1959) által homogén, izotrop anyagú, síkbeli tartományokra megfogalmazott „vezetési” problémák egy nem triviális általánosításában inhomogén és anizotrop esetekre.

## 2. SZEMÉLYI FELTÉTELEK

Dluhi Kornél, aki kutatói megbízás keretében dolgozott, 2006. december 15-én megvált a kutatócsoporttól. Az MTA által biztosított tudományos segédmunkatársi alkalmazása megszűnt, új munkahelyén mint informatikus tevékenykedik. Tekintettel arra, hogy PhD értekezésén dolgozik, a kutatócsoport igyekszik vele a kapcsolatot tartani és szakmailag támogatni. Tevékenysége 2005.01.01-2006.12.15-ig döntően elméleti modellek finomításában és számítógépi programok kifejlesztésében, valamint néhány publikálásra szánt kézirat szerkesztésében realizálódott. Kiesése a 2007-2008 évi kutatómunkákból, tekintettel arra, hogy PhD értekezését is megírhatta volna, az eredmények megjelenítésében gyengítette a kutatócsoport teljesítményét.

A hallgatók, Kocsán Lajos, Szűcs Nóra, Tóth Balázs, kezdetben döntően irodalomkutatásban és dokumentálásban vettek részt, időközben doktorandusz hallgatók lettek. PhD kutatási témájuk „gyengén” kapcsolódik a jelen OTKA kutatáshoz. Ennek ellenére, Kocsán Lajos és Tóth Balázs cikkek szerkesztésében és részszámítások elvégzésében támogatták a kutatócsoport munkáját.

### 3. KUTATÁSI TEVÉKENYSÉG RÖVID LEÍRÁSA

#### 3.1. Keresztmetszeti inhomogenitással rendelkező húzott-nyomott és hajlított-nyírt rudak statikai és dinamikai problémáinak megfogalmazása vektor-tenzor számítás alkalmazásával

E témához az alábbi publikált (előadott) és publikálás alatt lévő tanulmányok tartoznak [8, 9, 10, 21].

A [8] tanulmány egyenletesen előcsavart rudak lehajlásfüggvényének, kritikus terhelésének számítását, valamint a kapcsolt hajlító rezgéseinek a meghatározását ismerteti. A mechanikai mennyiségek számításánál kiemelt szerepe van a

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} = - \frac{\mathbf{J}(z) \cdot (\mathbf{e}_z \times \mathbf{M})}{E \det \mathbf{J}(z)} \quad (1)$$

differentiálegyenletnek, ahol  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(z)$  a rúdkeresztmetszetek középvonalra merőleges elmozdulását,  $\mathbf{M} = \mathbf{M}(z)$  a keresztmetszetet terhelő hajlítónyomatékot,  $\mathbf{J} = \mathbf{J}(z)$  a homogén keresztmetszet súlyponti tehetetlenségi tenzorát,  $E$  a rugalmassági modulust,  $z$  pedig az axiális koordinátát jelöli. Nyilván  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_z = 0$ .

A [9] és [10] tanulmányok a  $z$ -homogén rudak kapcsolt longitudinális-hajlító és kapcsolt hajlító-hajlító rezgéseinek a vizsgálatával foglalkoznak. A [9] tanulmány a rezgési feladathoz kapcsolódó lineáris sajátérték probléma levezetésére a Galerkin-féle közelítő módszert használta és a kapott eredmények pontosságát végeselemes számításokkal ellenőrizte. A [10] tanulmányban a kapcsolt axiális-hajlító és hajlító-hajlító rezgésekre bizonyos megtámasztási feltételek mellett egzakt sajátfrekvencia értékek kerültek meghatározásra az Euler-Bernoulli-Rayleigh rúdmodell keretein belül. Az analitikus modell alapján számított értékeket végeselemes számítási eredményekkel összehasonlítottuk. Minden esetben az analitikus számítási eredmények – az általunk vizsgált feladatokban – a végeselemes számítási eredmények közelébe esetek, 3 – 7 %-os pontossággal.

A [21] tanulmány vektor-tenzor algebrai módszerek alkalmazásával egy igen tömör leírást adja a  $z$ -homogén rudak húzás-nyomás és hajlítás-nyírási feladatainak. Vékony falú nyitott és zárt szelvényű hajlított-nyírt rúdra egy elsőrendű nyírási alakváltozási rúdmodell lett kifejlesztve, amely döntően a nyírási merevségi tenzor bevezetésén alapul. Zárt alakú képletek igen tömör, vektor-tenzoregyenletek formájában koordinátamentes megfogalmazásban adják meg a lehajlás és szögelfordulás vektor kifejezéseit.

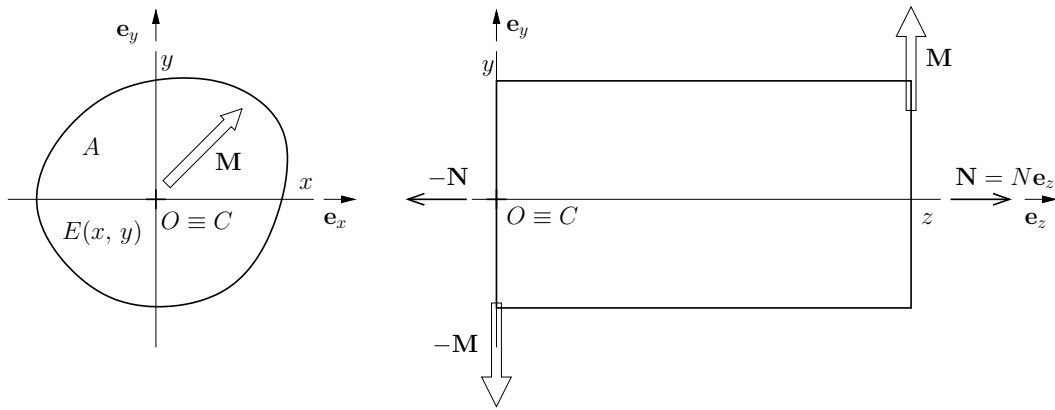
E kifejezések elkülönülten tartalmazzák a hajlításból és nyírásból származó elmozdulásokat és szögelfordulásokat. Számpéldák illusztrálják, hogy a hajlítási és nyírási deformációk főirányai általában nem esnek egybe. Bizonyos szimmetria feltételek esetén amely a geometriára és az anyageloszlásra vonatkoznak a hajlítási és nyírási deformációk főirányai megegyeznek.

Tekintettel arra, hogy a keresztmetszet belső magidomjának meghatározásával foglalkozó kiskészített cikk még nem került benyújtásra publikálás céljából és ebből kifolyólag

megjelenése is későbbiekben várható, e pontban röviden összefoglaljuk az ez irányban végzett kutató munkát, amelynek eredményei elsősorban a megjelenés alatt álló [21] tanulmányon alapulnak.

Az 1. ábra egy állandó keresztmetszetű  $z$ -homogén rudat szemléltet. A  $z$  irányú homogenitás fogalmából következik, hogy a rúd  $E$  rugalmassági modulusa csak az  $x, y$  keresztmetszeti koordináták függvénye. Az  $Oxyz$  koordináta-rendszer  $O$  origója a balszélső keresztmetszet  $E$ -vel súlyozott súlypontjába esik, vagyis  $z$  tengely  $E$ -vel súlyozott keresztmetszeti súlypontokat köti össze. A keresztmetszet rugalmassági modulussal súlyozott centrumát, amit  $C$  jelöl, az alábbi egyenlet határozza meg (1. ábra)

$$\int_A E(x, y) \mathbf{R} dA = \mathbf{0}, \quad \mathbf{R} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y. \quad (2)$$



1. ábra. Axiális erővel és hajlítónyomatékkal terhelt  $z$ -homogén rúd.

Az egyidejűleg alkalmazott  $N$  axiális erő és  $M$  hajlítónyomaték hatására a rugalmas anyagú rúdban ébredő  $\sigma_z$  normálfeszültség számítására a [21] tanulmányban az alábbi képlet került levezetése

$$\sigma_z = E(x, y) \left[ \frac{N}{S} + \mathbf{M} \cdot (\mathbf{J}^{-1} \times \mathbf{R}) \cdot \mathbf{e}_z \right], \quad (3)$$

ahol

$$S = \int_A E(x, y) dA, \quad \mathbf{J} = \int_A E(x, y) [\mathbf{1}R^2 - \mathbf{R} \circ \mathbf{R}] dA, \quad (4)$$

melyben  $\mathbf{1}$  kétdimenziós, másodrendű egységtenzor, „ $\times$ ” a vektoriális, „ $\cdot$ ” a skaláris, „ $\circ$ ” pedig a diadikus szorzás jele, továbbá  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{J} = \mathbf{1}$ .

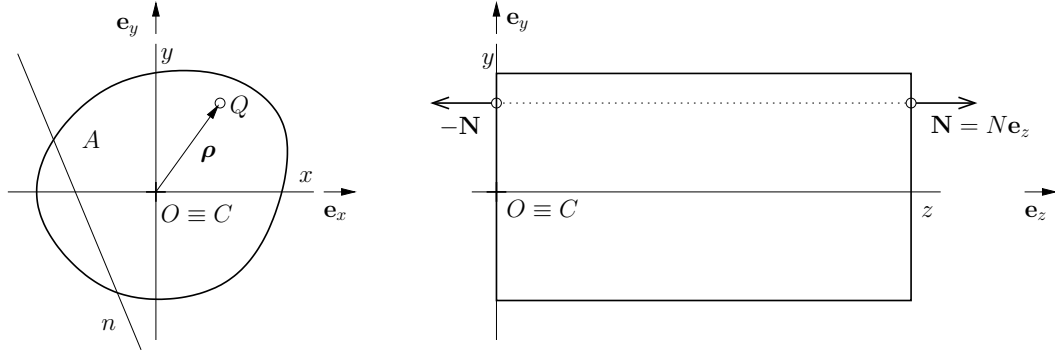
Az alkalmazott axiális erő hatásvonalát a  $z$  tengely, továbbá  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_z = 0$ . Centrikus axiális erő esetén ( $N \neq 0$ ,  $\mathbf{M} \neq \mathbf{0}$ ) a rúd minden keresztmetszetére érvényes a

$$\sigma_z = E(x, y) \frac{N}{S} \quad (5)$$

képlet. A 2. ábra excentrikusan elhelyezkedő axiális erővel terhelt  $z$ -homogén rudat szemléltet, nyilván  $N > 0$  esetén excentrikus húzás, míg  $N < 0$  esetén excentrikus nyomás a rúd igénybevétele. Ez esetben nem érvényes a (5) képlet,  $\sigma_z$  számítására a (3) egyenletet kell használni, ahol  $\mathbf{M} = N \overrightarrow{CQ} \times \mathbf{e}_z$  (2. ábra). A továbbiakban kihajlással kapcsolatos jelenségtől eltekintünk, vagyis nyomás esetén zömök rudat vizsgálunk. Jelölje  $\boldsymbol{\rho} = \xi \mathbf{e}_x + \eta \mathbf{e}_y$  az

alkalmazott excentrikus erő  $Q$  támadáspontjának helyvektorát a  $z = 0$  keresztmetszetben. Az (2) képlet alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\sigma_z(x, y) = E(x, y) \left[ \frac{1}{S} + \frac{\rho \cdot J \cdot R}{\det J} \right] N, \quad R = x e_x + y e_y. \quad (6)$$



2. ábra. Excentrikusan húzott  $z$ -homogén rúd.

Az (6) egyenlet alapján látható, hogy létezik egy egyenes vonal, amelynek pontjaiban a normálfeszültség zérus értékű, és ezen egyenes vonal helyzete független az alkalmazott erő nagyságától, előjelétől. A szóban forgó vonalat az adott  $Q$  támadáspontú  $N$  axiális erőhöz tartozó zérusvonalnak hívjuk. A zérusvonal elválasztja a keresztmetszet húzásra ( $\sigma_z(x, y) > 0$ ) és nyomásra ( $\sigma_z(x, y) < 0$ ) igénybe vett tartományait, a zérusvonal pontjaiban  $\sigma_z(x, y) = 0$ . Az (6) egyenlet alapján az  $n$  zérusvonal egyenlete (2. ábra)

$$\frac{1}{S} + \frac{\rho \cdot J \cdot R}{\det J} = 0 \quad (7)$$

alakban írható.

A zérusvonallal kapcsolatban két problémát oldunk meg. Az első feladatban adott  $Q$  támadáspontú axiális erőhöz tartozó  $n$  zérusvonalat határozzuk meg. E feladatban a zérusvonal egyenletét

$$R = R_0 + t e \quad -\infty < t < \infty \quad (8)$$

alakban keressük, ahol  $R_0 = \overrightarrow{OP_0}$  egy fix pont az  $n$  zérusvonalon és  $e$  pedig a zérusvonallal párhuzamos vektort jelöl, továbbá a zérusvonal pontjait a  $t$  paraméter jelöli ki. A (7) egyenlet felhasználásával az alábbi képleteket tudjuk levezetni  $R_0$  és  $e$  számítására

$$R_0 = -\frac{\det J}{S} \frac{\rho}{\rho \cdot J \cdot \rho}, \quad (\rho \neq 0), \quad e = e_z \times J \cdot \rho. \quad (9)$$

A második feladat az első feladat inverze; adott az  $n$  zérusvonal, meghatározandó az alkalmazott axiális erő  $Q$  támadáspontja. Legyen adott az  $n$  zérusvonal egyenlete

$$R = R_0 + t e \quad (-\infty < t < \infty) \quad (10)$$

alakban, ahol  $R_0$  és  $e$  ismert! Egyszerű számolással nyerjük, hogy  $R_0$ ,  $e$  és  $\rho$  kielégíti az alábbi egyenleteket

$$\frac{\det J}{S} + \rho \cdot J \cdot R_0 = 0, \quad (11)$$

$$\rho \cdot J \cdot e = 0. \quad (12)$$



A fenti egyenletekből azt kapjuk, hogy

$$\rho = -\frac{\det \mathbf{J}}{S} \frac{(\mathbf{J} \cdot \mathbf{e}) \times \mathbf{e}_z}{[(\mathbf{J} \cdot \mathbf{R}_0) \times (\mathbf{J} \cdot \mathbf{e})] \cdot \mathbf{e}_z} \quad (13)$$

Gyakran célszerű egy másik megoldását használni az első és második feladatnak. A zérusvonal egyenlete minden esetben felírható a következő formában egy alkalmasan megválasztott  $\mathbf{m}$  vektor segítségével

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{R} + \frac{\det \mathbf{J}}{S} = 0. \quad (14)$$

Az első feladat esetében  $\rho$  adott és  $\mathbf{m}$  ismeretlen. A (7) és a (14) egyenletek összevetéséből az következik, hogy

$$\mathbf{m} = \mathbf{J} \cdot \rho. \quad (15)$$

A második feladat esetében  $\mathbf{m}$  adott és  $\rho$  ismeretlen. Ismét a (7) és (14) egyenletek összevetéséből, illetve a (15) egyenletből az következik, hogy

$$\rho = \mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{m}. \quad (16)$$

A zérusvonallal kapcsolatos képletekből következik, hogy a zérusvonal annál távolabb esik az  $O \equiv C$  ponttól, minél közelebb van az  $O \equiv C$  ponthoz az excentrikus nyomó(húzó)-erő  $Q$  támadáspontja. Ha a nyomó(húzó)-erő  $Q$  támadáspontja elég közel van az  $O \equiv C$  ponthoz akkor az is előfordulhat, hogy a zérusvonal teljes egészében a keresztmetszetten kívül fekszik, ami azt eredményezi, hogy az egész keresztmetszetben egynemű, vagyis mindenütt nyomó, vagy húzó feszültségek ébrednek  $N$  előjelének megfelelően. Ennek az esetnek elsősorban rideg keresztmetszeti komponenseket is tartalmazó rudak, oszlopok, pillérek esetében van jelentősége. A rideg anyagból készült keresztmetszeti komponenseknek húzással szemben igen kicsi az ellenállásuk, csak olyan terhelést szabad használni, hogy e komponenseket is tartalmazó keresztmetszetekben mindenütt nyomófeszültség ébredjen. Ennek biztosításához pedig az szükséges, hogy az alkalmazott excentrikus nyomóerő támadáspontja az  $O \equiv C$  ponthoz elég közel essen.

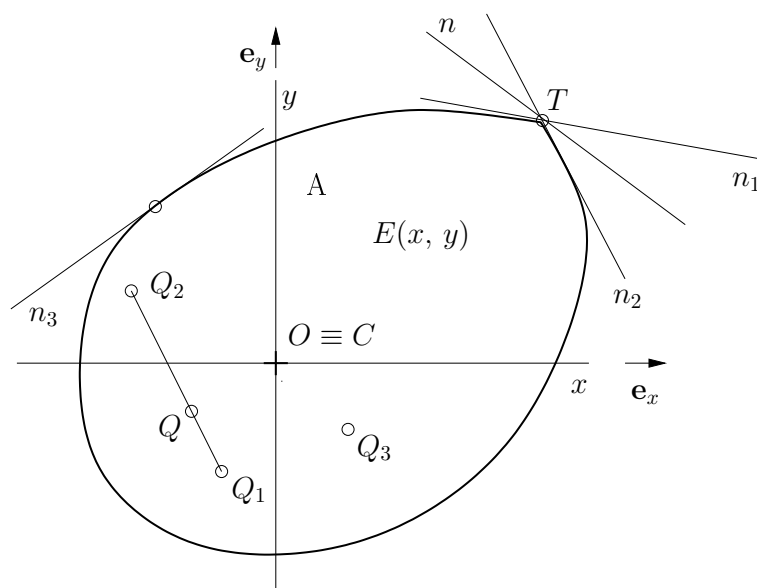
Az  $O \equiv C$  pont környezetében fekvő mindazon pontok, amelyekhez a keresztmetszet konvex burkán („támasztóidomon”) kívül fekvő zérusvonal tartozik a keresztmetszet belső magidomját alkotják. A keresztmetszet konvex burkát érintő zérusvonalaknak megfelelő axiális erő támadáspontok a belső magidom kontúrpontjait (határgörbáját) határozzák meg.

A 3. ábra szemlélteti egy konvex keresztmetszet esetén a belső magidom határgörbájének a meghatározását. A keresztmetszeti határgörbe  $T$  pontjában egyszeresen végtelen sok lehetséges zérusvonal létezik, amelyeknek csak egy közös pontja ( $T$ ) van a határgörbével. A  $T$  pontra illeszkedő  $n_1, n, n_2$  zérusvonalak rendre a belső magidom  $Q_1, Q, Q_2$  pontjait határozzák meg, vagyis a belső magidom az  $n_1$  és  $n_2$  „félérintők” által meghatározott  $Q_1 Q_2$  egyenes szakaszt is tartalmazni fogja.

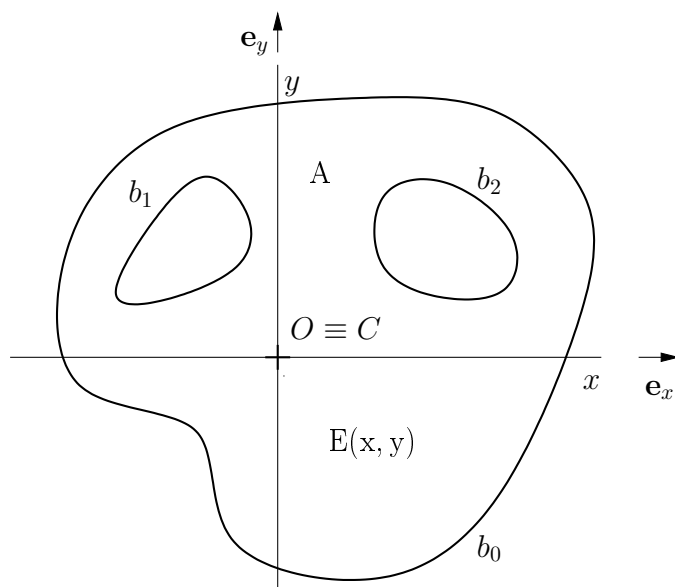
Az  $n_3$  zérusvonal (határgörbe érintő) a belső magidom  $Q_3$  pontját határozza meg.

A 4. ábra egy többszörösen összefüggő nem-konvex rúdkeresztmetszetet szemléltet. A keresztmetszet „külső” határgörbéje  $b_0$  és „belső” határgörbéi  $b_1$  és  $b_2$ .

E keresztmetszet belső magidomjának meghatározásához egy hozzárendelt módosított keresztmetszeti alakot használunk, amelynek kialakítását az 5 ábra szemlélteti. Első lépésben a  $b_0$  zárt görbe által határolt egyszeresen összefüggő nem-konvex tartomány konvex burkának  $b_0^*$  határgörbáját határozzuk meg. Ezt követően  $b_0^*$  határgörbéjű tartományban a  $b_1$  és  $b_2$  belső határgörbék által határolt lyukakat helyezzünk el (eltávolítjuk az anyagot). Az



3. ábra. Konvex keresztmetszet egy törésponttal rendelkező határgöbével



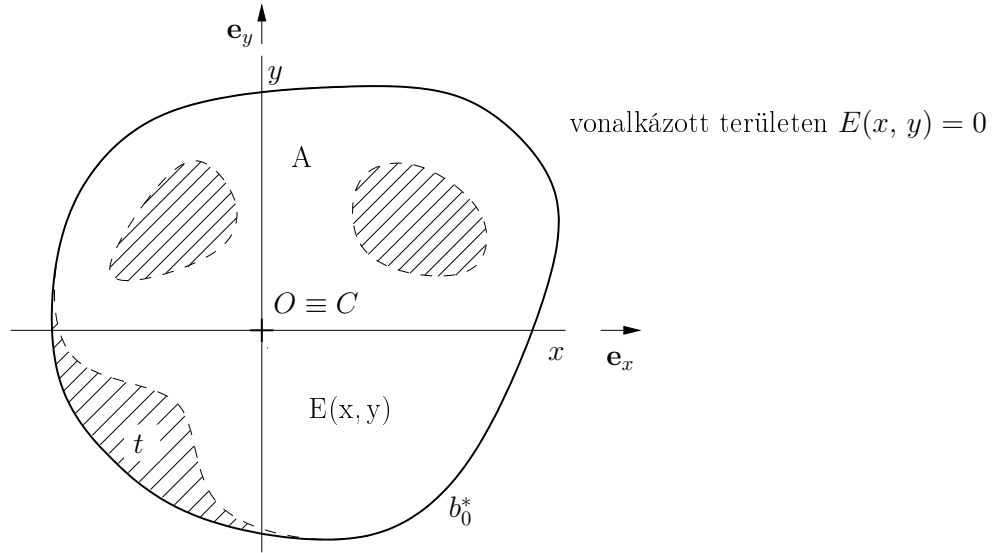
4. ábra. Többszörösen összefüggő üreges tartomány.

így kapott keresztmetszetbe, amelynek határgörbéi  $b_0^*$ ,  $b_1$  és  $b_2$ , a vonalkázott területekhez (üregekhez és kiegészítéssel nyert  $t$  tartományhoz) mivel ott nincs anyag zérus rugalmassági modulust rendelünk (5. ábra). Erre az új keresztmetszeti alakra közvetlenül használhatók a (9), (10), (13) és (15), (16) képletek, amelyek megadják az eredeti – a 4. ábrán szemléltetett –, többszörösen összefüggő keresztmetszeti tartomány belső magidomját.

Néhány példa a belső magidom meghatározására.

1. Példa: Inhomogén ellipszis alakú keresztmetszet.

A 6. ábrán szemléltetett keresztmetszet „belső”  $c$  sugarú köralakú tartományában lévő anyag rugalmassági modulusa  $E_2$ , a keresztmetszet többi részét kitöltő anyag rugalmassági modu-



5. ábra. A 4. ábrán vázolt többszörösen összefüggő üreges tartományhoz rendelt „egyszeresen” összefüggő konvex tartomány.

lusa  $E_1$ . Egyszerű számolással adódik, hogy

$$O \equiv C, \quad S = E_1(ab + \zeta c^2)\pi, \quad \zeta = \frac{E_2 - E_1}{E_1}, \quad (17)$$

$$\mathbf{J} = \langle J_x, J_y \rangle, \quad J_x = E_1(ab^3 + \zeta c^4)\frac{\pi}{4}, \quad (18)$$

$$J_y = E_1(a^3b + \zeta c^4)\frac{\pi}{4}, \quad J_{xy} = 0, \quad (19)$$

továbbá az ellipszis  $P_0(x_0, y_0)$  pontbeli érintője

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{R} + \frac{\det \mathbf{J}}{S} = -\frac{\det \mathbf{J}}{S} \left( \frac{x_0}{a^2} \mathbf{e}_x + \frac{y_0}{b^2} \mathbf{e}_y \right) \cdot \mathbf{R} + \frac{\det \mathbf{J}}{S} = 0. \quad (20)$$

A (16) és (20) egyenlet kombinálásával azt kapjuk, hogy  $\boldsymbol{\rho} = \overrightarrow{CQ} = \xi \mathbf{e}_x + \eta \mathbf{e}_y$  helyvektorral adott belső magidom  $\xi, \eta$  koordinátái az alábbiak

$$\xi = -\lambda x_0, \quad \lambda = \frac{1 + \zeta \frac{c^4}{a^3b}}{4(1 + \zeta \frac{c^2}{ab})}, \quad (21)$$

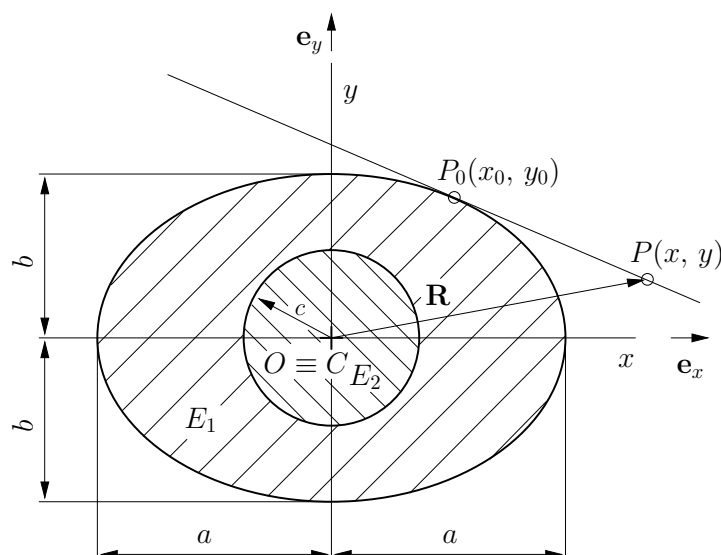
$$\eta = -\mu y_0, \quad \mu = \frac{1 + \zeta \frac{c^4}{ab^3}}{4(1 + \zeta \frac{c^2}{ab})}. \quad (22)$$

A (21) és (22) egyenletekből az következik, hogy az összetett keresztmetszet belső magidomja egy ellipszis, melynek főtengelyei az  $x$  és  $y$  tengelyekkel esnek össze, továbbá a főtengelyek  $a_k$  és  $b_k$  hosszai az alábbiak

$$a_k = \lambda a, \quad b_k = \mu b. \quad (23)$$

Homogén keresztmetszetre  $E_1 = E_2$  és  $\zeta = 0$ , azt kapjuk, hogy

$$\xi = -\frac{x_0}{4}, \quad \eta = -\frac{y_0}{4}, \quad (24)$$



6. ábra. Inhomogén ellipszis keresztmetszet.

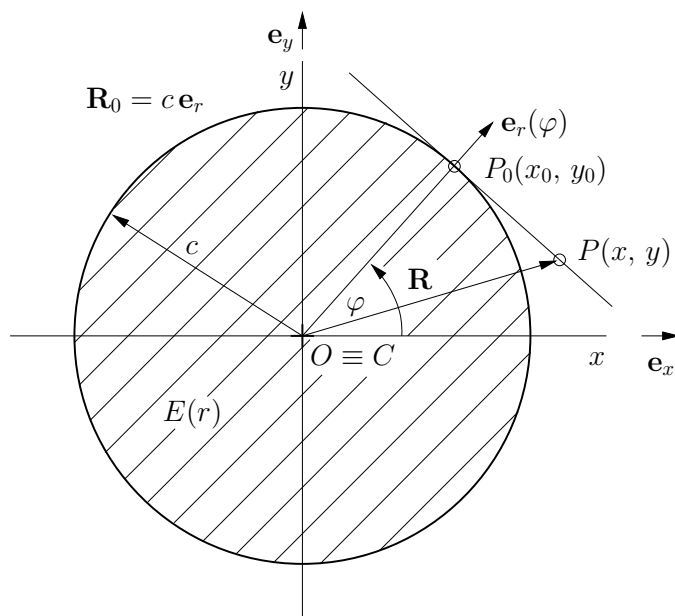
továbbá  $c$  sugarú körfurattal gyengített keresztmetszetekre  $E_2 = 0$  és  $\zeta = -1$  és ennek megfelelően

$$\xi = -\frac{a^3b - c^4}{4a^2(ab - c^2)}x_0, \quad \eta = -\frac{ab^3 - c^4}{4b^2(ab - c^2)}y_0. \quad (25)$$

A homogén anyagú keresztmetszetekre vonatkozó (24) és (25) képleteket más módszerrel Mofid és Yavari is levezette (Mofid, M., Yavari, A., 2000. On the kern of a general cross section. *Int. Journ. of Solids and Struc.* 31. pp. 2377-2403).

## 2. Példa: Funkcionálisan gradiens anyagú tömör körkeresztmetszet.

Az anyag rugalmassági modulusa az  $r$  sugárkoordináta sima függvénye (7). Egyszerű szá-



7. ábra. Funkcionálisan gradiens anyagú tömör körkeresztmetszet.

molással kapjuk, hogy

$$S = 2\pi \int_0^c E(r)r dr, \quad \mathbf{J} = J_E \mathbf{1}, \quad J_E = \pi \int_0^c E(r)r^3 dr, \quad (26)$$

továbbá az érintő egyenes egyenlete

$$\mathbf{e}_r \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) = 0, \quad \mathbf{R}_0 = c \mathbf{e}_r, \quad (27)$$

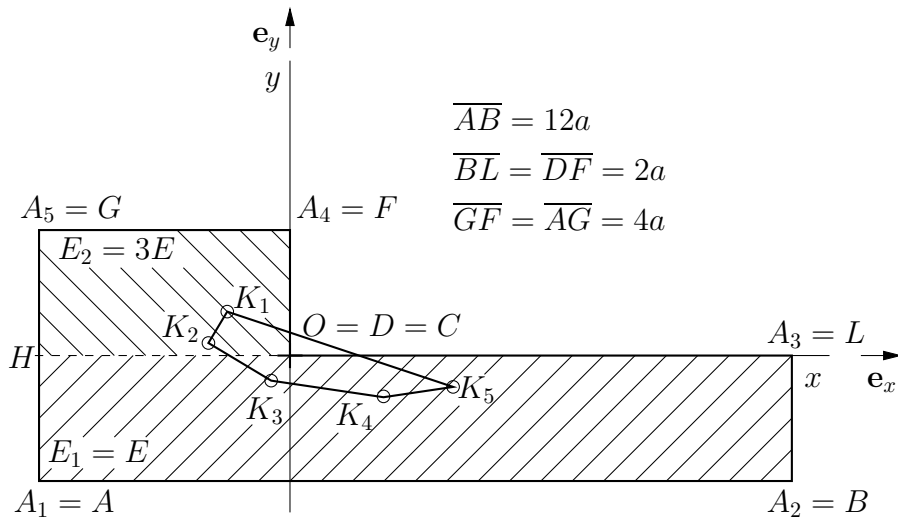
Nyilván

$$\mathbf{m} = -\frac{J_E^2}{cS} \mathbf{e}_r(\varphi), \quad \boldsymbol{\rho} = -\frac{J_E}{cS} \mathbf{e}_r(\varphi) \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi) \quad (28)$$

3. Példa: Téglalap keresztmetszetekből felépített kompozit keresztmetszet.

A 8. ábra az  $ABLH$  és  $DFGH$  téglalap keresztmetszetekből, amelyek rugalmassági modulusai  $E_1$  és  $E_2$ , felépített összetett keresztmetszet szemlélteti. A keresztmetszeti tartományok kapcsolódása a közös  $\overline{DH}$  él mentén tökéletes, azaz semmilyen irányú relatív elmozdulás nem lehetséges. A numerikus számításokat az  $E_1 = E$ ,  $E_2 = 3E$  adatokkal végezzük. A keresztmetszet rugalmassági modulussal súlyozott súlypontja (centruma) a  $D$  pontba esik. Elemi számításokkal azt kapjuk, hogy

$$S = 48a^2E, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 64 & 96 \\ 96 & 512 \end{bmatrix} a^4E, \quad \det \mathbf{J} = 23552E^2a^8. \quad (29)$$



8. ábra. Téglalap keresztmetszetekből felépített inhomogén keresztmetszet.

A keresztmetszet belső magidomja egy ötszög, melynek csúcspontjai  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ,  $K_4$  és  $K_5$ . E csúcspontokhoz amelyek egyben különböző excentrikus axiális erők támadáspontjainak is tekintendők, rendre az alábbi zérusvonalak tartoznak (8. ábra):  $K_i$ -hez az  $A_i$  és  $A_{i+1}$  pontok által meghatározott egyenes ( $i = 1 - 5$ ;  $A_6 = A_1$ ). A  $K_i$  ( $i = 1 - 5$ ) pontok meghatározását a (13) egyenlet felhasználásával végeztük. Részletes számítás az alábbi eredményeket adta (8. ábra):

$$\boldsymbol{\rho}_1 = \overrightarrow{OK_1} = (-\mathbf{e}_x + \frac{2}{3}\mathbf{e}_y)a, \quad (30)$$

$$\rho_2 = \overrightarrow{OK_2} = \left(-\frac{4}{3}\mathbf{e}_x + \frac{1}{4}\mathbf{e}_y\right)a, \quad (31)$$

$$\rho_3 = \overrightarrow{OK_3} = \left(-\frac{1}{3}\mathbf{e}_x - \frac{5}{12}\mathbf{e}_y\right)a, \quad (32)$$

$$\rho_4 = \overrightarrow{OK_4} = \left(\mathbf{e}_x - \frac{2}{3}\mathbf{e}_y\right)a, \quad (33)$$

$$\rho_5 = \overrightarrow{OK_5} = \left(\frac{8}{3}\mathbf{e}_x - \frac{1}{2}\mathbf{e}_y\right)a, \quad (34)$$

### 3.2. Lineárisan rugalmas, izotrop keresztmetszeti inhomogenitással rendelkező rúd hajlítása (alternatív megoldás)

A [19] tanulmány lineárisan rugalmas, izotrop, keresztmetszeti inhomogenitással rendelkező rúd hajlításával foglalkozik. Kimutatásra került, hogy a hajlított rúd számításánál használt alapképletek ugyanolyan formában is megfogalmazhatók, mint a homogén anyagú egyenes hajlításnak alávetett rúd esetében érvényes képletek. Minden esetben elkerülhető a hajlítási főirányok, a  $(4)_2$  egyenlet által definiált  $\mathbf{J}$  tenzor főirányainak a meghatározása. A levezetett képletek segítségével könnyen meghatározhatóak a legnagyobb nyomó és húzó normálfe-szültségek értékei funkcionálisan gradiens anyagú rudakban. Ez utóbbira egy számpéldát ismertet a [19] tanulmány.

### 3.3. Kétrétegű, rugalmas anyagú, részlegesen kapcsolt rudak

Az [1] és [7] tanulmányok kétrétegű, részlegesen kapcsolt rugalmas ágyazatra helyezett ru-dak statikai és dinamikai feladatainak megoldásával foglalkoznak. Az [1] tanulmány anali-tikus úton, a [7] tanulmány pedig végesesemes módszer alkalmazásával oldja meg a vizsgált peremérték-feladatokat. Következőekben néhány fontosabb összefüggés ismertetésével az e területen elvégzett kutatómunka bemutatásával foglalkozunk.

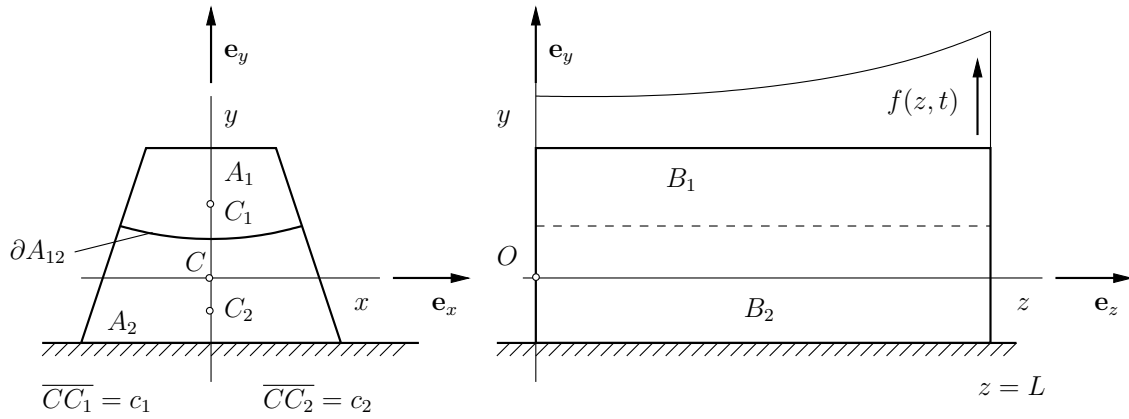
A kétrétegű, rugalmas anyagú, rugalmas ágyazathoz kapcsolt kompozit rúd terhelését és keresztmetszetét a 9. ábra szemlélteti. Az  $yz$  sík a rúd szimmetriasíkja és az alkalmazott terhelések, valamint a megtámasztási kényszerek síkja is az  $yz$  sík. Az  $A = A_1 \cup A_2$  egyben az  $yz$  sík rúdkeresztmetszet  $A_i$  ( $i = 1, 2$ ) résztartományát  $E_i$  ( $i = 1, 2$ ) rugalmassági modulusú homogén, lineárisan rugalmas anyag tölti ki. Az  $A_1$  és  $A_2$  tartományok közös határgörbét  $\partial A_{12}$  jelöli, továbbá az  $A_1$  és  $A_2$  keresztmetszetű részlegesen kapcsolt  $B_1$  és  $B_2$  rúdkompo-nensek közös határa a  $\partial B_{12} = \partial A_2 \times (O, L)$  hengerfelület, ahol  $L$  a rúd hossza.

Feltevés szerint normál irányban a  $B_1$  és  $B_2$  rúdkomponensek kapcsolata tökéletes, sza-kadás csak az axiális irányú elmozdulásban lehetséges a  $\partial B_{12}$  felületen történő áthaladáskor, a  $B_1$  rúdkomponensről a  $B_2$  rúdkomponensre (*interlayer slip*). Az  $Oxyz$  koordinátarendszer  $O$  kezdőpontja a  $z = 0$  koordinátával kijelölt keresztmetszet  $E$ -vel súlyozott  $C$  súlypontjával esik egybe, továbbá az  $A_1$  és  $A_2$  homogén keresztmetszeti tartományok súlypontjait  $C_1$  és  $C_2$  jelöli (9. ábra). A 9. ábra alapján írható, hogy

$$c_1 = \left| \overrightarrow{CC_1} \right| = \frac{A_2 E_2}{\langle AE \rangle} c, \quad c_2 = \left| \overrightarrow{CC_2} \right| = \frac{A_1 E_1}{\langle AE \rangle} c, \quad c = \left| \overrightarrow{C_1 C_2} \right| = c_1 + c_2, \quad (35)$$

ahol  $\langle AE \rangle = A_1 E_1 + A_2 E_2$ . Mind a  $B_1$  és mind a  $B_2$  rúdkomponensek elmozdulásmezője követi az Euler-Bernoulli hipotézist és ennek megfelelően

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = u(x, y, z, t) \mathbf{e}_x + v(x, y, z, t) \mathbf{e}_y + w(x, y, z, t) \mathbf{e}_z, \quad (36)$$



9. ábra. Rugalmasan ágyazott, kétrétegű részlegesen kapcsolt rúd.

$$u = 0, \quad v = v(z, t) \quad (x, y, z) \in B = B_1 \cup B_2, \quad (37)$$

$$w = w_i(z, t) - y \frac{\partial v}{\partial z} \quad (x, y, z) \in B_i \quad (i = 1, 2), \quad (38)$$

ahol  $t$  az időkoordináta.

A rétegek relatív elcsúszását (*interlayer slip*-et) az alábbi egyenlet definiálja

$$s(x, y, z, t) = w_1(z, t) - w_2(z, t) \quad (x, y, z) \in \partial B_{12}. \quad (39)$$

A nem tökéletesen kapcsolódó rétegek által átvitt axiális irányú erő

$$T = k s, \quad (40)$$

ahol  $k$  a kapcsolat nyírási merevsége. A teljes rúdkeresztmetszetre eső axiális erő  $N = N_1 + N_2$  zérus, ahol

$$N_i = \int_{A_i} \sigma_z dA \quad (i = 1, 2). \quad (41)$$

Egyszerű számolással nyerjük, hogy

$$N_1 = -N_2 = \langle AE \rangle_{-1} \left( \frac{\partial s}{\partial z} - c \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \quad (42)$$

$$M = \int_A \sigma_z dA = -\{EI\} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + c \langle AE \rangle_{-1} \frac{\partial s}{\partial z}, \quad (43)$$

ahol

$$\frac{1}{\langle AE \rangle_{-1}} = \frac{1}{A_1 E_1} + \frac{1}{A_2 E_2}, \quad (44)$$

$$\{EI\} = \int_A E y^2 dA. \quad (45)$$

Hosszadalmas, de elemi számítások elvégzésével kapjuk a rugalmasan ágyazott, részlegesen kapcsolt, kétrétegű rúd „dinamikai” egyensúlyi egyenletére az alábbi eredményt:

$$\frac{\partial^6 v}{\partial z^6} + \Omega^2 \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + \frac{K}{\langle EI \rangle} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{K \Omega^2}{\{EI\}} v - \frac{1}{\langle EI \rangle} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{\Omega^2}{\{EI\}} p = 0, \quad (0 < z < L), \quad (46)$$

ahol (9. ábra)

$$p(z, t) = f(z, t) - \langle \rho A \rangle \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \quad (47)$$

Itt bevezettük az alábbi jelöléseket

$$\langle EI \rangle = \{EI\} - c^2 \langle AE \rangle_{-1}, \quad (48)$$

$$\langle \rho A \rangle = \rho_1 A_1 + \rho_2 A_2, \quad \Omega^2 = k \frac{\{EI\}}{\langle EI \rangle \langle AE \rangle_{-1}} \quad (49)$$

ahol  $\rho_i$  az  $A_i$  tartományt kitöltő anyag tömegsűrűsége, továbbá  $K$  az ágyazási tényező.

Az [1] tanulmány a (47) differenciálegyenlet analitikus, a [7] tanulmány pedig vége-sele-mes megoldását ismerteti és szemlélteti különböző számpéldákon.

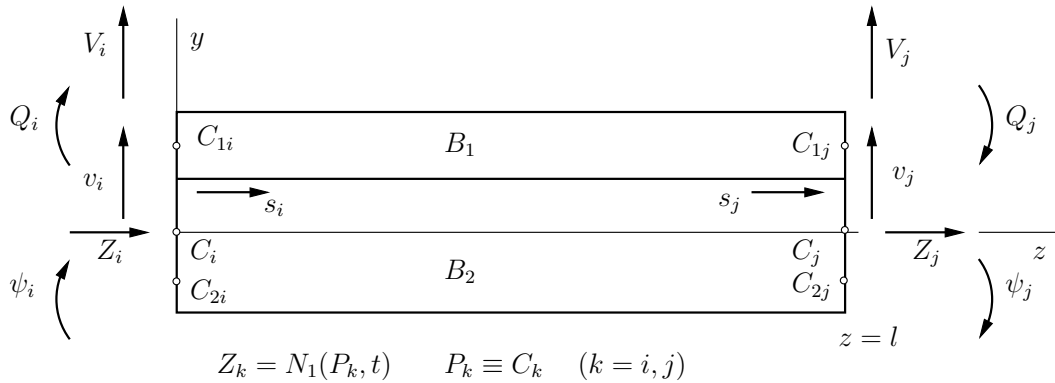
A vége-sele-mes vizsgálathoz használt rétegzett rúd elemet a 10. ábrában vázoltuk, az elem kétsomópontú hat szabadságfokú. A csomóponti „elmozdulás” vektor

$$\mathbf{u}_k(t) = \begin{bmatrix} s(P_k, t) & v(P_k, t) & \psi(P_k, t) \end{bmatrix}^T, \quad \psi(P_k, t) = -\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{P_k, t}, \quad (k = i, j) \quad (50)$$

továbbá az  $\mathbf{u}_k$ -nak megfelelő csomóponti tehervektor

$$\mathbf{q}_k(t) = \begin{bmatrix} N_1(P_k, t) & V(P_k, t) & Q(P_k, t) \end{bmatrix}^T, \quad (N_i = Z_i) \quad (k = i, j) \quad (51)$$

ahol  $V$  nyíróerő,  $Q$  hajlítónyomaték.



10. ábra. Kétsomópontú rétegzett, részlegesen kapcsolt rúdelem.

A potenciális energia minimum elvére épített elmozdulás alapú vége-sele-mes approximációnál az alábbi alakfüggvényeket használtuk

$$s(z, t) = s(P_k, t)\left(1 - \frac{z}{l}\right) + s(P_j, t)\frac{z}{l}, \quad (52)$$

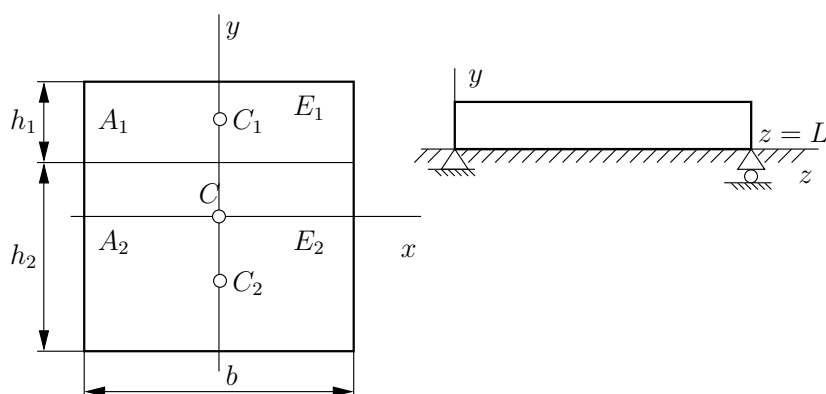
$$v(z, t) = v(P_i, t)n_1(z) + \psi(P_i, t)n_2(z) + v(P_j, t)n_3(z) + \psi(P_j, t)n_4(z), \quad (53)$$

ahol

$$\begin{aligned} n_1(z) &= 1 + 2\left(\frac{z}{l}\right)^3 - 3\left(\frac{z}{l}\right)^2, & n_2(z) &= -z\left(\frac{z}{l} - 1\right)^2, \\ n_3(z) &= 3\left(\frac{z}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{z}{l}\right), & n_4(z) &= z\left[\left(\frac{z}{l}\right)^2 - \frac{z}{l}\right]. \end{aligned} \quad (54)$$

Az 1. táblázat egy mindkét végén csuklósan megtámasztott (szabadon felfekvő) rugalmas ágyazaton nyugvó téglalap keresztmetszetű rúd analitikus úton meghatározott (pontos) és vége-sele-mes számítással előállított (közelítő) hajlító rezgési saját-körfrekvenciáinak összehasonlítására ad lehetőséget. A vizsgált rúd adatait a 11. ábrában adtuk meg.





$$L = 0.5 \text{ m}, \quad b = 20 \text{ mm}, \quad h_1 = 1.5 \text{ mm}, \quad h_2 = 8.5 \text{ mm}$$

$$E_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}, \quad E_2 = 5 \cdot 10^4 \text{ MPa}$$

$$\rho_1 = 7500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad \rho_2 = 3000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

11. ábra. Példa hajlítózregések saját-körfrekvenciáinak a számítására.

1. táblázat. Hajlítózregések saját körfrekvenciái [Hz].

$\omega_i$	$k = 0$		$k = 10 \text{ MPa}$		$k = 60 \text{ MPa}$		$k = \infty$		
	FEM	exact	FEM	exact	FEM	exact	FEM	exact	
1	619.61	618.88	629.54	628.92	663.11	662.78	739.43	739.42	$K = 2 \times 10^5 \text{ N/m}^2$
2	1450.80	1430.59	1468.20	1448.91	1544.44	1528.87	1993.48	1991.13	
3	3151.70	3042.27	3169.13	3061.91	3251.17	3153.94	4027.28	3996.09	
4	5708.35	5353.86	5724.53	5373.80	5802.79	5469.82	6758.97	6593.92	
1	1095.55	1095.14	1101.20	1100.85	1120.73	1120.54	1167.51	1167.50	$K = 8 \times 10^5 \text{ N/m}^2$
2	1709.13	1692.02	1723.93	1707.54	1789.31	1775.89	2188.67	2186.53	
3	3278.65	3173.60	3295.41	3192.43	3374.38	3280.80	4127.38	4096.95	
4	5779.41	5429.56	5795.39	5449.22	5872.71	5543.94	6819.09	6655.53	

### 3.4. Piezoelektromos réteggel erősített egyenes középvezetű rudak

E téren végzett vizsgálatokat [4, 15, 16, 22, 25] tanulmányok tartalmazzák. A [4] tanulmány háromrétegű, asszimmetrikus elrendezésű, kollokált piezoelektromos aktuátor-szenzor párral felszerelt prizmatikus tartó analitikus és végelelemes vizsgálatát tárgyalja. A cikk annak a kérdésnek a vizsgálatával foglalkozik, hogy az aktuátorba bevezetett időben állandó elektromos feszültség hatására, hogyan változik a szenzorfeszültség az aktív rétegek vastagságának a függvényében. Először külső mechanikai terheléstől mentes, majd excentrikus húzásnak alávetett tartó képezte a vizsgálatok tárgyát. A tanulmány legfontosabb megállapításai az alábbiak:

- létezik egy kritikus rétegvastagság, amely értéknél a szenzor bármilyen bemenő  $U_a$  aktuátor feszültség esetén sem ad elektromos kimenő jelet,
- létezik egy optimális rétegvastagság, amely értéknél a szenzor extrémális kimenő jelet szolgáltat,
- tehermentes tartó esetén a szerkezet szélességi mérete nem befolyásolja lényegesen a szenzoron megjelenő feszültséget,
- a piezoelektromos rúdmodell és a 3D végeselemes modell közötti különbséget a keresztmetszetek eltérő deformációja és a piezoelektromos hatások ( $e_{31}$  és  $e_{33}$ ) elkülönülése okozza. Pontosabb számításokhoz célszerűbb háromdimenziós modellt használni.

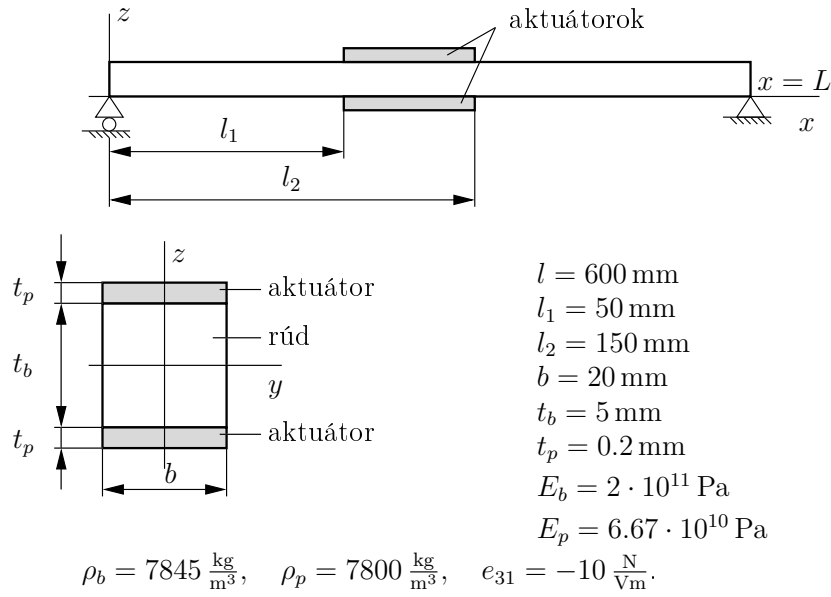
A [15] tanulmány tárgyát rétegezett rudak statikai peremérték-feladataival kapcsolatos optimalizációs problémák megfogalmazása és megoldása képezi. Minden esetben a tartó tartalmaz legalább egy aktív réteget is. Az aktuátorra (aktuátor párra) alkalmazott villamos feszültség helyes megválasztásával lehetőségünk van minimális lehajlás biztosítására. Ezen állítást a [15] tanulmány két példa kapcsán szemlélteti. Vizsgálat tárgyát képezte az aktív réteg optimális vastagsági méretének a meghatározása is. Optimális vastagsági méret esetén adott alap tartónál egységnyi erősségű villamos tér hatására maximális értékű görbület változás alakul ki a vizsgált tartószakaszon. A [15] tanulmány egy eljárást ismertet a statikailag határozott megtámasztáson, minimális súlyú, változó szélességű tartó tervezésére, ha a tartó valamelyik keresztmetszetének elmozdulása előírt értékű. Egy példa keretében a [15] tanulmány szemlélteti a legnagyobb hajlítónyomaték minimális értékének eléréséhez szükséges aktuátor feszültség meghatározását. A [15] tanulmány két példája foglalkozik az előírt deformációs alakot „legjobban” megközelítő alak meghatározásával, amely az alkalmazott aktuátor páron előírandó villamos feszültség célszerű megválasztásával érhető el.

A [25] tanulmány piezoelektromos aktuátorral erősített Rayleigh-Euler-Bernoulli rúd dinamikai feladatainak analitikus megoldásával foglalkozik. Az analitikus megoldás felépítésénél feltételezett, hogy a tartón elhelyezett aktuátorpárhoz tartozó tehetetlenségi erőrendszer elhanyagolható, vagyis a dinamikai egyenletek megfogalmazásánál az aktuátor elemek sűrűségét zérusnak tekintjük. E feltevés alapján levezetett egyenletek pontosságát olyan végeselemes számításokkal ellenőriztük, amikor is az elemek tömegmátrixában figyelembe vettük az aktuátorelemek sűrűségét (tehetetlenségi erőrendszerét) is. Az alábbi numerikus példában (12. ábra) az aktuátorpáron működő időben

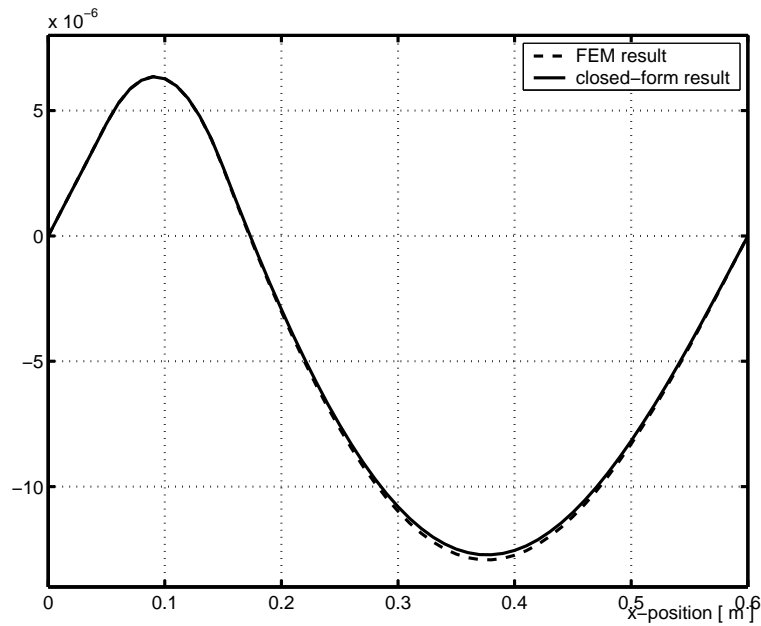
$$U(t) = (100 \text{ V}) \cos \omega t \quad \left( \omega = 325 \frac{1}{\text{s}} \right) \quad (55)$$

törvény szerint változó feszültséggel harmonikusan gerjesztett tartót vizsgálunk.

A 13. ábra az analitikus számítással ( $\rho_p = 0$ ) és a végeselemes számítással ( $\rho_p \neq 0$ ) kapott lehajlágörbékét szemlélteti, a számítások a 12. ábrában megadott tartóra vonatkoznak.



12. ábra. Harmonikusan gerjesztett tartó szimmetrikus elrendezésű aktuátorokkal.



13. ábra. Harmonikusan gerjesztett tartó lehajlás függvényei (analitikus és VEM megoldás).

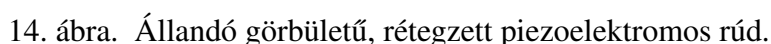
### 3.5. Állandó görbületű kompozit rudak, valamint egy és többretegű piezoelektromos rudak hajlítása

E területen végzett kutatómunka eredményeinek egy részét az [2, 5, 11, 14] tanulmányok tartalmazzák. Az [2] tanulmányban egy egyszerű egydimenziós mechanikai modell, amely a Rayleigh-Euler-Bernoulli rúd elméletén alapul lett kifejlesztve  $\varphi$ -homogén rudakra. A mozgásegyenletek és kapcsolódó peremfeltételek két kinematikai változó, a radiális elmozdulás és a keresztmetszet szögelfordulásának a függvényében kerültek megfogalmazásra. A rugalmasságtan egzakt kinematikai egyenleteit használja [2], továbbá a forgásból származó tehetetlenségi erőrendszert is tartalmazzák a levezetett mozgásegyenletek. Mind statikai, mind

Az [5] előadás piezoelektromos rétegekkel erősített görbe rudak hajlítási feladatának a megoldására három elméleti modellt dolgozott ki egy egzakt rugalmasságtani és két szilárdságtani modellt. Az alkalmazott aktuátor elemek vastagsági mérete a vizsgálat tárgyát képező radiális irányban rétegezett rudak esetében lényegesen kisebb, mint a téglalap keresztmetszetű rugalmas anyagú rúd vastagsága.

## *Állandó görbületű, rétegzett piezoelektromos rudak hajlítása*

A 14. ábra szemlélteti a vizsgálat tárgyát képező többrétegű, téglalap keresztmetszetű, állandó görbületű piezoelektromos rudat. A rúd rétegei radiális irányban polarizáltak, mind a rétegvastagság, mind pedig az anyagi jellemzők rétegenként más és más értéket vehetnek fel.


$$\mathbf{u}(r, \varphi, z) = U(\varphi) \mathbf{e}_r + \left( \omega r \varphi + \frac{dU}{d\varphi} \right) \mathbf{e}_\varphi, \quad (56)$$

ahol  $\mathbf{u}$  az elmozdulás vektor,  $U = U(\varphi)$  a radiális elmozdulás,  $\omega$  egyelőre ismeretlen állan-

dó. Egyszerű számossal azt kapjuk, hogy

$$\varepsilon_r = \varepsilon_z = \gamma_{r\varphi} = \gamma_{\varphi z} = \gamma_{rz} = 0, \quad (57)$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\Omega(\varphi)}{r} + \omega, \quad \Omega(\varphi) = \frac{d^2 U}{d\varphi^2} + U. \quad (58)$$

A villamos eltolási vektort, ami kielégíti a Gauss egyenletet összhangban a [14]-ben bemutatott rugalmasságtani megoldással, az alábbi alakúnak választjuk

$$\mathbf{D} = D_r \mathbf{e}_r, \quad (D_r = \frac{D}{r}, \quad D = \text{állandó}) \quad (59)$$

Az (56), (57), (58) és (59) képletek minden rétegre igazak. A [11, 14] tanulmányokban használt anyagegyenletekből  $\varepsilon_r = 0$  helyettesítésével és  $\sigma_r$  eliminálásával azt kapjuk, hogy

$$\sigma_{i\varphi} = c_i \varepsilon_\varphi - h_i D_r \quad R_i < r < R_{i+1}, \quad (60)$$

$$E_{ir} = -h_i \varepsilon_\varphi + \beta_i D_r \quad R_i < r < R_{i+1}, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (61)$$

Az (57), (58), (59) és az (60) (61) egyenletek kombinálásával jutunk a (62) és a (63) egyenletekre

$$\sigma_{i\varphi} = c_i \left( \frac{\Omega}{r} + \omega \right) - h_i \frac{D}{r}, \quad R_i < r < R_{i+1} \quad (62)$$

$$E_{ir} = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = -h_i \left( \frac{\Omega}{r} + \omega \right) + \beta_i \frac{D}{r}, \quad R_i < r < R_{i+1}, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (63)$$

Az (60), (61), (62), (63) egyenletekben szereplő  $c_i$ ,  $h_i$ ,  $\beta_i$  úgynevezett „redukált” anyagállandók. Az  $\Omega = \Omega(\varphi)$ ,  $\omega$  és  $D$  meghatározására az alábbi egyenleteket használjuk

$$N = 2b \int_{R_1}^{R_{n+1}} \sigma_\varphi dr = 0, \quad M = 2b \int_{R_1}^{R_{n+1}} r \sigma_\varphi dr, \quad \phi(R_1) = 0, \quad \phi(R_{n+1}) = V, \quad (64)$$

ahol  $V$  az előírt villamos potenciál.

Az  $R_1$  és  $R_{n+1}$  sugarú hengerfelületeken igen vékony vezetőréteg van, amely biztosítja a villamos potenciál állandóságát. Hosszadalmas, de elemi számításokkal azt kapjuk, hogy

$$\Omega = \frac{a_3 a_5 - a_2 a_6}{2bA} M + \frac{a_2 a_5 - a_3 a_4}{A} V, \quad (65)$$

$$\omega = \frac{a_1 a_6 - a_3^2}{2bA} M + \frac{a_2 a_3 - a_1 a_5}{A} V, \quad (66)$$

$$D = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{2bA} M + \frac{a_2^2 - a_1 a_4}{A} V, \quad (67)$$

ahol

$$a_1 = \sum_{i=1}^n c_i \ln \frac{R_{i+1}}{R_i}, \quad a_2 = \sum_{i=1}^n c_i (R_{i+1} - R_i), \quad (68)$$

$$a_3 = \sum_{i=1}^n h_i \ln \frac{R_{i+1}}{R_i}, \quad a_4 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_i (R_{i+1}^2 - R_i^2), \quad (69)$$

$$a_5 = \sum_{i=1}^n h_i (R_{i+1} - R_i), \quad a_6 = \sum_{i=1}^n \beta_i \ln \frac{R_{i+1}}{R_i}, \quad (70)$$

$$A = 2a_2a_3a_5 + a_1a_4a_6 - a_2^2a_6 - a_3^2a_4 - a_5^2a_1. \quad (71)$$

A (65), (66), (67) egyenleteknek a (62) és (63) egyenletekbe történő helyettesítésével közvetlenül megkapjuk a  $\sigma_\varphi$  normálfeszültség és a  $\phi$  villamos potenciál képleteit. Az utóbbi levezetéshez a (63) egyenletet integrálni kell

$$\sigma_{i\varphi} = \frac{c_i}{2bA} \left[ \frac{a_3a_5 - a_2a_6}{r} + a_1a_6 - a_3^2 \right] M - \frac{h_i(a_1a_5 - a_2a_3)}{2bAr} M + \\ + \frac{c_i}{A} \left[ \frac{a_2a_5 - a_3a_4}{r} + a_2a_3 - a_1a_6 \right] V - \frac{h_i(a_2^2 - a_1a_4)}{Ar} V \quad (72)$$

melyben  $R_i < r < R_{i+1}$ , és  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\phi_p(r) = \langle p-1 \rangle \left[ a_{3p} \left( \frac{a_3a_5 - a_2a_6}{2bA} M + \frac{a_2a_5 - a_3a_4}{A} V \right) + \right. \\ \left. + a_{5p} \left( \frac{a_1a_6 - a_3^2}{2bA} M + \frac{a_2a_3 - a_1a_5}{A} V \right) - a_{6p} \left( \frac{a_1a_5 - a_2a_3}{2bA} M + \frac{a_2^2 - a_1a_4}{A} V \right) + \right. \\ \left. + h_p \left( \frac{a_3a_5 - a_2a_6}{2bA} M + \frac{a_2a_5 - a_3a_4}{A} V \right) \ln \frac{r}{R_p} + \left( \frac{a_1a_6 - a_3^2}{2bA} M + \frac{a_2a_3 - a_1a_5}{A} V \right) (r - R_p) \right] - \\ - \beta_i \left( \frac{a_1a_5 - a_2a_3}{2bA} M + \frac{a_2^2 - a_1a_4}{A} V \right) \ln \frac{r}{R_p} \quad R_p \leq r < R_{p+1}, \quad p = 1, 2, \dots, n. \quad (73)$$

Itt bevezettük a

$$\langle p-1 \rangle = \begin{cases} 0 & \text{ha } p = 1 \\ 1 & \text{ha } 2 \leq p \leq n \end{cases} \quad (74)$$

előírással értelmezett diszkrét argumentumú függvényt, továbbá  $a_{3p}$ ,  $a_{5p}$  és  $a_{6p}$  együtthatók ( $p = 2, 3, \dots, n$ ) az alábbi egyenletek által definiáltak

$$a_{3p} = \sum_{i=1}^{p-1} h_i \ln \frac{R_{i+1}}{R_i}, \quad a_{5p} = \sum_{i=1}^{p-1} h_i (R_{i+1} - R_i), \\ a_{6p} = \sum_{i=1}^{p-1} \beta_i \ln \frac{R_{i+1}}{R_i}, \quad (p = 2, \dots, n). \quad (75)$$

Végezetül a

$$\frac{d}{dr}(r\sigma_r) = \sigma_\varphi \quad (76)$$

mechanikai egyensúlyi egyenlet és a  $\sigma_r(R_1) = \sigma_r(R_{n+1}) = 0$  statikai peremfeltételek és a  $\sigma_r$  normálfeszültség folytonosságát kifejező

$$\sigma_{ir}(R_i) = \sigma_{(i+1)r}(R_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (77)$$

egyenletek felhasználásával megkapható  $\sigma_r = \sigma_r(r)$ , ( $R_1 < r < R_{n+1}$ ) normálfeszültségre vonatkozó képlet is, ez utóbbi felírásától eltekintünk.

A piezoelektromos rudakhoz kapcsolódik a 3.1. pontban említett vektor-tenzoralkgebrai módszerek alkalmazásával levezetett dinamikai egyensúlyi egyenlete az axiálisan polarizált egyenes tengelyű piezoelektromos rúdnak, amely axiális és hajlító rezgésre vonatkozik. Ezen levezetés részletes ismertetésével a [22] tanulmány foglalkozik.

### ***3.6. Inhomogén keresztmetszetű rudak csavarása***

E témakörhöz tartozó eredmények dokumentálása a [12, 13, 17, 18, 20, 23, 24, 26] munkákban található. A [12] tanulmány egy közelítő módszert ismertet a hengeresen anizotrop, inhomogén rudak csavarási feladatának a megoldására. A [17] és a [24] tanulmányok piezoelektromos rudak csavarási feladatával foglalkoznak. A [17] tanulmány homogén, míg a [24] tanulmány gyűrűszerű rétegzett üreges keresztmetszetű piezoelektromos rudakra vonatkozik. A [18] tanulmányban bizonyított tételek egyaránt érvényesek homogén és inhomogén anyagú zárt szelvényű többmezős vékony falú prizmatikus rudakra. A homogén rúdra vonatkozó eredmények inhomogén rúdra a falvastagság csúsztató rugalmassági modulussal történő alkalmas súlyozása révén vihetők át.

A [20] tanulmány egy pontos megoldását adja a funkcionálisan gradiens anyagú, anizotrop, ellipszis keresztmetszet csavarási feladatának, ha az anyagjellemzők az axiális koordináta sima függvényei. A megoldás arra az esetre vonatkozik, amikor is a keresztmetszeti határgörbe az anizotrop rúd anyagállandóinak egy alkalmasan megválasztott függvényeként adható meg. A [13] tanulmány funkcionálisan gradiens anyagú körkeresztmetszetű rudak statikai és dinamikai (rezgési) csavarási feladataival foglalkozik. A közlésre benyújtott [24] tanulmány néhány funkcionálisan gradiens anyagú egyenletes csavarásnak kitett rúd csavarási feladatának a pontos megoldását adja meg. A [26] tanulmány a  $z$ -homogén rudak egyenletes csavarási feladatának Saint-Venant-féle megoldását felhasználva egy alsó és felső korlátot bizonyít a csavart rúd effektív nyírási modulusára.

### ***3.7. Állandósult vezetési problémák inhomogén, anizotrop testekben***

A [3] tanulmány néhány elméleti tételt fogalmaz meg inhomogén testekben kialakult állandósult hővezetési problémákkal kapcsolatban. A bizonyított felcserélési tétel alkalmazását a  $\varphi$ -homogén, nem teljes tórusz alakú testben kialakult keresztmetszeti hőáram meghatározásán illusztrálja.

A [6] tanulmány Rayleigh (1876) és Duffing (1959) által bizonyított tételek nem triviális általánosításával foglalkozik inhomogén és anizotrop síktartományokra. Az általánosított tételek használatát két példa szemlélteti.

## HIVATKOZÁSOK

- [1] Dluhi Kornél: Rugalmasan ágyazott, részlegesen kapcsolt kompozit rudak, *GÉP*, **LVI**, pp. 15-19, 2005.
- [2] Ecsedi István, Dluhi Kornél: A linear model for the static and dynamic analysis of nonhomogeneous curved beams, *Applied Mathematical Modelling* **29**: pp. 1211-1231, 2005.
- [3] Ecsedi István, Dluhi Kornél: A reciprocal theorem for steady-state heat conduction problems, *Journal of Computational and Applied Mechanics*, **6**: pp. 175-182, 2005.
- [4] Kovács Pál Zoltán: Aktív rétegek optimális vastagságának meghatározása piezoelektromos tartószerkezet esetén, *GÉP*, **LVI**, pp.39-48, 2005.
- [5] Dluhi Kornél, Ecsedi István: Bending of piezoelectric laminated curved beam, *6<sup>th</sup> European Solid Mechanics Conference*. Budapest, 28 August - 1 September, 2006.
- [6] Ecsedi István: Two theorems on the steady-state conduction in anisotropic body, *Mechanics Research Communications*, **33**, pp. 581-591, 2006.
- [7] Ecsedi István, Dluhi Kornél: Two-layer beam with weak shear connection on elastic foundation, *microCAD 2006 International Scientific Conference, Section F: Applied Mechanics*, pp. 7-11, 2006.
- [8] Ecsedi István, Dluhi Kornél: Egyenes középvonalú, előcsavart rúd statikai és dinamikai vizsgálata, *GÉP*, **LVII**.(8-9), pp. 50-53, 2006
- [9] Ecsedi István, Kovács Pál Zoltán: Vibration analysis of non-homogeneous beams, *microCAD 2006 International Scientific Conference, Section F: Applied Mechanics*, pp. 19-24, 2006.
- [10] Kovács Pál Zoltán, Ecsedi István: Coupled bending and axial vibrations of non-homogeneous beams, *6<sup>th</sup> European Solid Mechanics Conference*. Budapest, 28 August - 1 September, 2006.
- [11] Dluhi Kornél: Állandó görbületű piezoelektromos rúd tiszta hajlítása, *GÉP*, **LVIII**(5-6), pp. 10-15, 2007.
- [12] Ecsedi István: Egy közelítő módszer a tömör keresztmetszetű prizmatikus rudak csavarási feladatának a megoldására, *X. Magyar Mechanikai Konferencia, Miskolci Egyetem*, 24. oldal, 2007. augusztus 27-29, 2007.
- [13] Ecsedi István, Baksa Attila: Torsional response of a functionally graded elastic cylinder, *microCAD 2007 International Scientific Conference, Section F: Applied Mechanics*, pp 7-12, 2007.



- [14] Ecsedi István, Dluhi Kornél: Állandó görbületű, több rétegű piezoelektromos rudak hajlítási feladata, *X. Magyar Mechanikai Konferencia, Miskolci Egyetem*, 25. oldal, 2007. augusztus 27-29, 2007.
- [15] Kovács Pál Zoltán: Piezoelektromos tartók néhány optimalizálási feladatának elemi megoldása, *GÉP, LVIII*(5-6), pp. 24-33, 2007.
- [16] Kovács Pál Zoltán: Piezoelektromos elemeket is tartalmazó szerkezetek elasztotikai peremérték-feladata a lineáris rugalmasságtan primál rendszerében, *X. Magyar Mechanikai Konferencia, Miskolci Egyetem*, 52. oldal, 2007. augusztus 27-29, 2007.
- [17] Ecsedi István, Dluhi Kornél: Torsion of piezoelectric cylinder, *microCAD 2008 International Scientific Conference, Section F: Applied Mechanics*, pp. 19-22, 2008.
- [18] Ecsedi István, Baksa Attila: An analogy for the torsion of thin walled closed section, *microCAD 2008 International Scientific Conference, Section F: Applied Mechanics*, pp. 13-18., 2008.
- [19] Baksa Attila, Ecsedi István: A note on the pure bending of nonhomogeneous prismatical bars. *International Journal of Mechanical Engineering Education* (közlésre elfogadva)
- [20] Ecsedi István: Torsion of functionally graded anisotropic bar of an elliptical cross section. *Journal of Computational and Applied Mechanics*, (közlésre elfogadva)
- [21] Ecsedi István, Dluhi Kornél: Vector formulae for non-homogeneous prismatic bars. *Journal of Computational and Applied Mechanics*, (közlésre elfogadva).
- [22] Ecsedi István: Dynamic equilibrium equations of linear piezoelectric Euler-Bernoulli beams. *Mech. Res. Commun.*, doi: 10.1016/j.mechrescom.2008.09.008.
- [23] Ecsedi István: The Saint-Venant torsion of non-homogeneous cylindrical bars, *European Journal of Mechanics – A/Solids* (közlésre benyújtva)
- [24] Ecsedi István, Dluhi Kornél: Torsion of piezoelectric hollow cylinders. *microCAD 2009 International Scientific Conference*, Miskolc, 19-20 March, 2009 (előadásra és közlésre a konferencia kiadványban elfogadva).
- [25] Kovács Pál Zoltán: Closed form solution of the dynamical problem of a homogeneous prismatic beam with attached piezoelectric actuators, *microCAD 2009 International Scientific Conference*, Miskolc, 19-20 March, 2009 (előadásra és közlésre a konferencia kiadványban elfogadva).
- [26] Ecsedi István: Bounds for the effective shear modulus, *Engineering transactions*, **53**, pp. 415-423, 2005.